Lineare Optimierung
anhand von Beispielen

Lineare Ungleichungssysteme
zur Lösung von Optimierungsprozessen
im Bereich Operations Research

VORWISSENSCHAFTLICHE ARBEIT

im Bereich „Mathematik“

Bundesrealgymnasium
9800 Spittal/Drau, Zernattostraße 10

BETREUERIN
Prof. Mag. Thorbauer-Noisternig

VERFASSER
Markus Tripp, 8B

Spittal/Drau, am 14. Februar 2019

Abstract

Die vorliegende Vorwissenschaftliche Arbeit ist dem mathematischen Teilgebiet der *Optimierung* zuzuordnen, welches sich mit der Suche des Maximums bzw. Minimums einer Zielfunktion beschäftigt. In dieser Arbeit werde ich konkret anhand von Linearer Optimierung aufzeigen, dass eine fundierte Kenntnis von linearer Ungleichungs- und Gleichungssysteme sehr praxisorientiert eingesetzt werden kann. Lineare Optimierung ist ein Subbereich der Optimierung, der die Maximierung bzw. Minimierung einer linearen Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen beschreibt. Ich habe bewusst den Fokus auf Optimierungsprobleme in zwei Variablen zugunsten der Verständlichkeit gesetzt, denn in solchen graphisch lösbaren Problemen kommen fast alle Eigenschaften Linearer Programme zum Ausdruck. Einleitend bespreche ich die mathematischen Grundlagen Linearer Optimierung. Der Hauptteil dieser Arbeit thematisiert die praktische Anwendung von einfachen Beispielen unseres Alltags, anhand derer der Prozess Lineare Optimierung erklärt werden sollte. Ziel meiner Arbeit ist es, auf einfache Weise zu vermitteln, wie Mathematik in der Wirtschaft eingesetzt werden kann. Meine Arbeit basiert größtenteils auf Sekundärliteratur. Ein Teil der methodischen Vorgehensweise jedoch besteht aus einem Interview mit DDr. Philipp Hungerländer, den ich über seine Arbeit als Optimierer befragte.

Vorwort

Die Freude an der Mathematik und ihrer formal exakten Sprache waren für mich Gründe dafür, meine VWA im Bereich Mathematik zu schreiben. Angestoßen von meiner Mathematikprofessorin und Betreuungsperson fand ich Zugang zu dem Thema mathematische Optimierung, wobei ich beschloss, mich auf Optimierung von linearen Funktionen zu konzentrieren.
Nach längerer Beschäftigung mit Fachliteratur und einer Auseinandersetzung mit dem Definition-Satz-Beweis-Schema im Zuge meines IT-Ferialpraktikums an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt im Bereich *Angewandte Mathematik* hat sich für mich herausgestellt, dass die theoretischen Aspekte der Linearen Optimierung und die logisch abstrakten Zusammenhänge innerhalb der Linearen Algebra für mich von großem Interesse sind, weswegen im Anhang auch mathematische Grundlagen besprochen werden. Trotzdem habe ich probiert, diese Arbeit entsprechend meines Titels beispielhaft aufzubauen.
Mein großes Interesse an diesem Thema und der beachtliche Umfang der Linearen Optimierung waren für mich auch Anhaltpunkt dafür, eine längere Fassung dieser VWA zu schreiben. Die längere Fassung, welche unter

URL: `http://www.brg-spittal.com/tripp/Lineare-Optimierung.pdf`

einsehbar ist und zum Download bereit steht, beschäftigt sich lediglich weiterführend mit linearen Optimierungsproblemen in mehreren Variablen und deren Lösungsverfahren.

Spittal/Drau, am 7. November 2018, Markus Tripp

Inhaltsverzeichnis

LaTeX-Schriftsatz

1 Einleitung

„Man soll die Dinge so einfach machen wie möglich - aber nicht einfacher.“

Albert Einstein (Zit. n. Brünner, o.J.)

Dieses Zitat von Albert Einstein war der Leitgrundsatz meiner Arbeit. Mein Anliegen ist es, der Leser*innenschaft Mathematik auf möglichst einfache Art und Weise näherzubringen. Daher habe ich mich bewusst auf Optimierungsprobleme in zwei Variablen, deren Vorteil in der graphischen Lösbarkeit liegt, konzentriert. Die Arbeit spannt einen Bogen von den theoretischen Grundlagen bis hin zu praktischen Anwendungen in unserem Alltag. In den einzelnen Kapiteln werde ich zunächst die mathematische Basis für Lineare Programme beschreiben, um mich dann auf Grundbegriffe und Eigenschaften Linearer Optimierung beziehen zu können. Abschließend werde ich anhand eines einfachen Beispiels einen vollständigen Planungsprozess eines Linearen Programms aufzeigen. Der größtenteils theoretische Anhang A zu den mathematischen Grundlagen ist dem Umstand der Eleganz des mathematischen Konstrukts und der Zusammenhänge in der Linearen Algebra, die mich zutiefst fasziniert haben, geschuldet. Er ist essentiell, um die späteren Linearen Programme in mehreren Variablen zu verstehen, denn die als Nebenbedingungen vorkommenden linearen Ungleichungssysteme werden als unterbestimmte, lineare Gleichungssysteme umgeschrieben, um sie rein algebraisch lösen zu können. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 156) Zusätzlich ist die Matrizenschreibweise von enormer Wichtigkeit, um später Lineare Programme übersichtlich und vereinfacht darzustellen. Im Anhang B ist noch der erwähnte Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssysteme als Flowchart und weiterführend als C++-Code dargestellt.

Im Zuge meines IT-Ferialpraktikums hatte ich auch die Möglichkeit mit Herrn DDr. Philipp Hungerländer, dessen Spezialgebiet die mathematische Optimierung ist, ein Interview zu führen, um mein Wissen in diesem Bereich zu vertiefen und praktische Anwendung in der realen Welt kennen zu lernen. Zurzeit arbeitet er an einer Optimierung für Rail Cargo mit dem Ziel, unter bestimmten Nebenbedingungen möglichst wenige Lokomotiven zu verwenden, um

alle Fahrten der Züge durchzuführen. Jedoch kommen hierbei mehrere Arten von mathematischer Optimierung zum Einsatz. Grundsätzlich handelt es sich um Ganzzahlige Optimierung, bei der zusätzlich zu den linearen Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen noch Ganzzahligkeitsbedingungen für die Variablen gelten. Hierbei kommen Lineare Programme als Subroutine vor. Abschließend erklärte er die Unterschiede der Lösungsverfahren Simplex- und Innere-Punkte-Methode, die sich größtenteils in der Laufzeit und Restartfähigkeit bemerkbar machen, sowie die Nutzung des Servers für die Lösung von Optimierungsproblemen. (vgl. Hungerländer, persönliche Kommunikation, 23. Juli, 2018; siehe Anhang C)
Mein Ziel ist es, der Leser*innenschaft zu zeigen, dass eine fundierte Kenntnis von *linearen Ungleichungen und Gleichungen* sehr nützlich ist und praxisorientiert eingesetzt werden kann.

2

Einführung

„Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: [...] Daher kommt es, daß [sic!] unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.“

David Hilbert (Zit. n. Brünner, o.J.)

Die *„Vermittlung zwischen Theorie und Praxis“* findet zum Beispiel Ausdruck bei den Methoden der Linearen Optimierung. Diese Anwendung macht es möglich, zahlreiche Problemstellungen zu lösen, deren Ziel eine Minimierung bzw. Maximierung ist. Der erste Gedanke zu Optimierungsprozessen führt vermutlich zu ökonomische Probleme, wie die Maximierung des Gewinns oder die Minimierung der Kosten. Doch heutzutage finden solche Praktiken vor allem auch im Transportwesen und im technischen Bereich, wie bei der optimalen Ventilsteuerung von Verbrennungsmotoren, Anwendung. Gerade im Zeitalter der Digitalisierung und der Verdrängung vieler Arbeitsbereiche ist das Interesse an Optimierungsverfahren groß. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. VII ff)

2.1 Mathematische Hintergründe

Bereits in der 11. Schulstufe kommen Schüler*innen im Mathematikunterricht mit Extremwertaufgaben in Kontakt, die im Zuge der Differentialrechnung behandelt werden. Doch beschränkt man sich bei solchen schulischen Beispielen auf eine Nebenbedingung, die die zu optimierende Funktion einschränkt. Im Gegensatz dazu ist es mit einer fundierten Kenntnis von *linearen Ungleichungssystemen* bereits möglich, praktische Optimierungsanwendungen zu lösen, die auch in der Wirtschaft und anderen Bereichen des Lebens Anwendung finden. (vgl. Schneider, o.J.)

2.1.1 Lineare Ungleichungen

Definition 1. Als lineare Ungleichung in zwei Variablen in Normalform versteht man eine Ungleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 < b$ ($\leq, \geq, >, \neq$) mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$. (vgl. Blaha, o.J., S. 105)

Um den zulässigen Bereich der Ungleichung zu finden, der jene Werte beinhaltet, die die Ungleichung erfüllen, kann es hilfreich sein, die Ungleichung in die allgemeine Form $x_2 < a_1'x_1 + b'$ überzuführen. Da die mathematische Interpretation der Gleichung $x_2 = a_1'x_1 + b'$ eine Gerade im Koordinatensystem ergibt und zusätzlich aber gilt, dass x_2 kleiner sein muss als der rechte Term, führt dies zu der Erkenntnis, dass die Lösungsmenge unterhalb der Geraden liegen muss. Die lineare Ungleichung ergibt somit eine *Halbebene*, die durch eine *Randgerade* begrenzt wird. (vgl. Blaha, o.J., S. 105)
Ähnlich wird bei Ungleichungen, in denen andere Relationszeichen auftreten, vorgegangen. Hierbei wird lediglich zwischen den Fällen unterschieden, ob die Halbebene über oder unter der Randgeraden liegt und ob die Randgerade Element der Lösungsmenge ist oder nicht. (vgl. Blaha, o.J., S. 105)

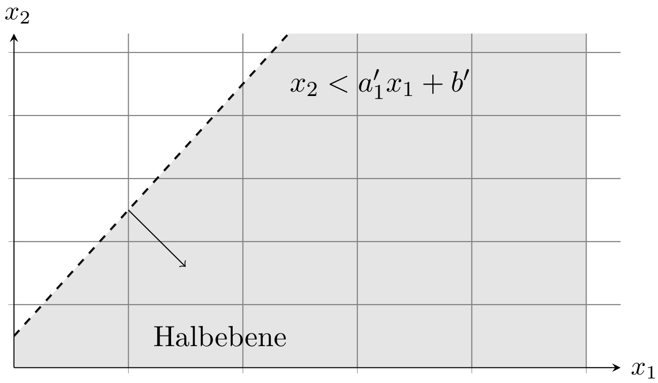

Abb. 1: Halbebene der Ungleichung $x_2 < a_1'x_1 + b'$
(eigene Darstellung in Anlehnung an vgl. Blaha, o.J., S. 105)

2.1.2 Lineare Ungleichungssysteme

Lineare Ungleichungssysteme bestehen wie LGS[1] aus mehreren Komponenten, in diesem Fall Ungleichungen, deren Korrektheit gleichzeitig erfüllt werden muss. Zweckmäßigerweise wird zur Auffindung der Lösung, die als *Durchschnitt der Halbebenen* zu interpretieren ist, die graphische Methode verwendet. Normalerweise ergibt sich aus dem Durchschnitt ein Bereich von Werten, die die Ungleichungen erfüllen. (vgl. Blaha, o.J., S. 107)

[1]LGS: lineares Gleichungssystem

Gegeben sei folgendes *lineares Ungleichungssystem:*

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$
$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Die Menge M der Zahlenpaare (x_1, x_2), die die Ungleichungen erfüllen, bezeichnet man als *Menge der zulässigen Punkte.* Zur Lösung dieses System sind noch einige Gedankenschritte erforderlich:

- Wir wir bereits wissen, ergibt die Gesamtheit der Werte, die die Ungleichung $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 \leq b_i$ mit $|a_{i1}| + |a_{i2}| > 0$ erfüllen, eine Halbebene, die von der Randgerade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ begrenzt wird. (vgl. Burkard, o.J., S. 13)

- Die Lösung eines Ungleichungssystem von zwei Ungleichungen ist als Durchschnitt zweier Halbebenen zu interpretieren. Diese Lösungsmenge kann leer oder eine konvexe polyedrische Menge sein, die durch endlich viele Geraden begrenzt wird. (vgl. Burkard, o.J., S. 13 f) Zusätzlich bezeichnen wir eine Menge, deren Elemente innerhalb von Schranken liegen, als beschränkt. Andernfalls nennen wir sie unbeschränkt (nach unten und/oder oben hin). (vgl. Stobitzer, o.J.)

- Zwischen diesen Fällen wird auch beim Durchschnitt von m Ungleichungen unterschieden. (vgl. Burkard, o.J., S. 14)

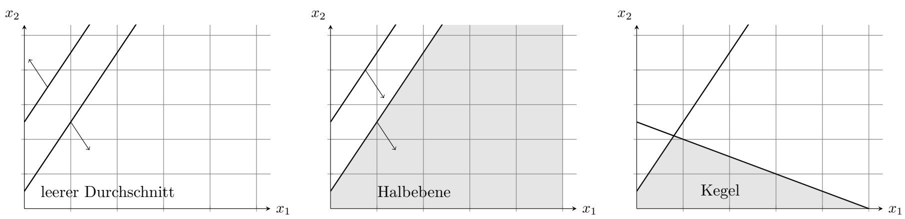

Abb. 2: Fälle für den Durchschnitt zweier Halbebenen
(eigene Darstellung in Anlehnung an Burkard, o.J., S. 14)

Was nun einzuwerfen ist, ist, dass wir uns bei der Lösung linearer Ungleichungssysteme auf die graphische Methode verlassen haben. Solche Darstellungen sind eine gute Methode - auch für die später auftretenden Optimierungsprobleme - um die wesentlichen Eigenschaften zu erkennen. Problematisch hierbei ist natürlich, dass man sich auf zwei Variablen beschränken muss, um graphisch an das Problem herangehen zu können. (vgl. Burkard, o.J., S. 13) Bei linearen Ungleichungssystemen mit mehreren Variablen werden sogenannte Schlupfvariablen eingeführt, die aus einem linearen Ungleichungssystem ein LGS machen und es so erlauben, rein algebraisch bei der Lösung vorzugehen. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 156) Ein Verfahren zur Lösung eines LGS wird ausführlich im Anhang A.4.1 behandelt.

3 Lineare Optimierung

Ein grundlegender Vorteil Linearer Optimierung ist die vielseitige Einsatzmöglichkeit, die im folgenden Abschnitt näher beleuchtet wird.

3.1 Anwendungsgebiete Linearer Optimierung

Es existieren zahlreiche Gebiete, die mit den Methoden der Linearen Optimierung lösbar sind. Die wichtigsten Anwendungsgebiete sind:

- Produktionsplanungsprobleme
- Mischprobleme
- Investitionsplanungsprobleme
- Transportprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Verschnittprobleme
- Knapsack-Probleme (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 4)

Im Abschnitt 3.2 werden relevante Grundbegriffe anhand eines Problems aus der Produktionsplanung geklärt, im Abschnitt 3.6 sind noch zusätzliche konkrete Beispiele und deren Modellierungen zu finden.

3.2 Grundbegriffe anhand eines einführenden Beispiels aus der Produktionsplanung

Beispiel 1 (Produktionsplanung)**.** *Ein agrarökonomischer Betrieb verfügt über* 40 *ha Anbaufläche,* 12 000,– *Kapital und dem Betrieb stehen* 240 *Arbeitstage zur Verfügung. Ziel ist es, jeweils Weizen und Zuckerrüben so anzubauen, dass unter Einhaltung der Restriktionen auf zur Verfügung stehende Anbaufläche, Kapital und Zeit der Erlös maximiert werden kann. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 155)*

	Weizen	Zuckerrüben
Kosten/ha	200, –	600, –
Tage/ha	5	10
Erlös/ha	1000, –	1200, –

Tab. 1: Tabelle zu Beispiel 1 in Anlehnung an Scheid/Schwarz, 2009, S. 155

Die in der Tabelle angegebenen *Nebenbedingungen* beschreiben ein System von fünf linearen Ungleichungen, die die zu optimierenden Anzahlen beschränken,

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 40, \quad 200x_1 + 600x_2 \leq 12\ 000, \quad 5x_1 + 10x_2 \leq 240,$$

wobei x_1, x_2 die Menge der Feldfrüchte in ha beschreibt. Die ersten beiden Ungleichungen werden als *Nichtnegativitätsbedingungen* bezeichnet, die die Lösung des Systems auf den ersten Quadranten beschränken, weil die Anzahl der Feldfrüchte, die angebaut werden, nicht negativ sein kann. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 14) Ihre Lösungsmenge wird durch ein Fünfeck im x_1x_2-Koordinatensystem, der Planungspolyeder[2] der Aufgabe, dargestellt, wobei es sich in diesem Fall bei der Verwendung von zwei Variabeln um ein Vieleck handelt. Diesen Planungsbereich erhält man durch die Schnittpunkte der Geraden, die die enstehenden Halbebenen der Ungleichungen beschränken. Die zu optimierende Funktion wird *Zielfunktion* genannt und ist in diesem Kontext durch den mehrgliedriger Term $z = F(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1200x_2$ zur Berechnung des Verkaufserlöses gegeben. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 155 f)

Nun ist derjenige Wert der Zielfunktion zu finden, der unter Einhaltung der Nebenbedingungen den optimalen Wert für z ergibt. Durch Parallelverschieben der Geradengleichung $1000x_1 + 1200x_2 = z$ entlang des Planungsvielecks ist der größtmögliche Wert der Zielfunktion abzulesen. Für den optimalen Wert wird der Rand des Planungsbereichs erwartet, der Punkt $(32, 8)$ (siehe dazu auch Abb. 3), welcher zu dem Funktionswert

$$\max\ 1000x_1 + 1200x_2 = 1000 \cdot 32 + 1200 \cdot 8 = 41\ 600$$

führt. Nun weiß der Betrieb, dass unter den gegebenen Bedingungen der höchstmögliche Gewinn zu erzielen ist, wenn 32 ha Weizen und 8 ha Zuckerrüben angebaut werden. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 155 f)

[2]Polyeder: Vielflächner (vgl. Dudenredaktion, Polyeder)

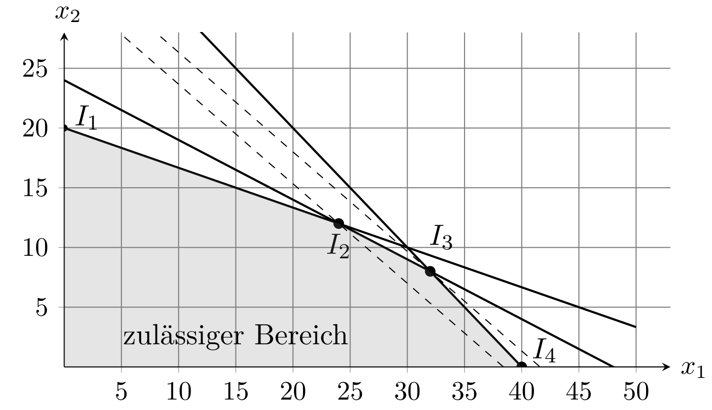

Abb. 3: Planungsvieleck und Zielfunktion des Beispiels 1
(eigene Darstellung in Anlehnung an Scheid/Schwarz, 2009, S. 155)

Formal geschrieben ergibt sich aus den Zusammenhängen folgendes mathematisches Modell, welches die Nebenbedingungen, die Restriktionen auf die Zielfunktion, und die Zielfunktion beschreibt. Im Abschnitt 3.6 werden noch weitere Bespiele zu Optimierungsmodellen beleuchtet.
Mathematische Modellierung:

$$x_1, x_2 \quad \text{Menge der Feldfrüchte in ha}$$

$$\max\ z = F(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1200x_2$$

$$\begin{aligned} \textbf{u.d.N.}\ ^{3}\ x_1 + x_2 &\leq 40 \text{ (Beschränkung Anbaufläche)} \\ 200x_1 + 600x_2 &\leq 12\ 000 \text{ (Beschränkung Kosten)} \\ 5x_1 + 10x_2 &\leq 240 \text{ (Beschränkung Tage)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ (Anbau nur nichtnegativer Mengen)} \end{aligned}$$

Allgemein lässt sich über die Optimierung sagen, dass der optimale Punkt, für den eine Zielfunktion maximal bzw. minimal wird, am Rand des Planungsvielecks liegt. (vgl. Schwarz, o.J., S. 7)
Dieses einführende Beispiel sollte Aufschluss darüber geben, wie Lineare Optimierung in Grundzügen funktioniert und wie man bei der Lösung vorgeht. Die Eigenschaften eines solchen Problems sind am besten bei zwei Variablen ersichtlich, da es graphisch lösbar ist. Es ist jedoch der Fall, dass bei den meisten realen Optimierungsproblemen mehrere Variablen auftreten, weswegen man auf andere Lösungsverfahren zurückgreifen muss. (vgl. Burkard, o.J., S. 13)

[3] u.d.N.: unter den Nebenbedingungen (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 41)

3.3 Mathematische Formulierung eines allgemeinen LP in zwei Variablen

Unter einem *linearen Optimierungsproblem (LOP)* bzw. einem *Linearen Programm (LP)* ist eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu verstehen, wobei sowohl die zu maximierende bzw. minimierende Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen von linearer Gestalt sind. Von allen zulässigen Lösungen ist also der Wert zu bestimmen, für den die Zielfunktion optimal wird. (vgl. Seiffart/Manteuffel, 1974, S. 10)

Gegeben sei folgendes *Lineare Programm* in zwei Variablen:

Zielfunktion Die zu optimierende Funktion heißt Zielfunktion.	max/min $z = F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$
Nebenbedingungen (Restriktionen) Die Nebenbedingungen schränken die Zielfunktion ein.	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$
Nichtnegativitätsbedingungen	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (vgl. Schneider, o.J.)

Dabei sind

$z = F(x_1, x_2)$	Zielfunktion
x_1, x_2	Variable
c_1, c_2	reelle Koeffizienten der Zielfunktion
m	Anzahl der Nebenbedingungen
a_{ij}	reelle Koeffizienten der Nebenbedingungen mit $j = 1, 2$ und $i = 1, ..., m$
b_i	rechte Seite der Nebenbedingungen mit $i = 1, ..., m$ (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 14)

3.4 Bedeutung des Begriffs Operations Research

Die Methoden der Linearen Optimierung sind einer der wichtigsten Bestandteile des Bereichs *Operations Research*. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 35)
Die ursprüngliche Entstehung des Begriffs *Operations Research* (OR) geht auf den militärischen Bereich während des Zweiten Weltkriegs zurück. Damit wurde die Entwicklung diverser Lösungsmethoden strategischer Probleme benannt. Nach Ende des Krieges prägte die Verwendung des Begriffs vor allem die Benutzung in der Wirtschaft. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 1)
Obwohl für die Bezeichnung heutzutage keine universell gültige Definition existiert, ist man sich größtenteils einig, dass *Operations Research* sich mit der *„Entwicklung und Anwendung mathematischer Methoden zur Entscheidungsvorbereitung“* beschäftigt. (Koop/Moock, 2008, S. 1)
Gegenwärtig wird unter dem vorliegenden Begriff eine Vielzahl mathematischer Methoden verstanden - Lineare Optimierung, Nichtlineare Optimierung und Graphentheorie - um einige zu nennen. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 2) Einen äußerst wichtigen Teil nehmen dabei die Methoden der Linearen Optimierung ein. Der größte Vorteil, den solche Systeme gegenüber anderen Lösungsinstrumenten aufweisen, ist, dass sie mathematisch einfach und übersichtlich dargestellt werden können. G.B. Dantzig entwickelte 1947 einen Algorithmus zur Lösung linearer Optimierungsprobleme, der unter dem Namen *Simplex-Verfahren* bekannt ist. Diese Lösungsmethode bildet gegenwärtig das klassische Instrument zur Lösungsermittlung. (vgl. Seiffart/Manteuffel, 1974, S. 9)

3.5 OR-gestützter Planungsprozess

„Das Problem zu erkennen ist wichtiger als die Lösung zu erkennen, denn die genaue Darstellung des Problems führt zur Lösung.“

Albert Einstein (Zit. n. Sonne/Weiß, 2013, S. 177)

Auch bei Linearer Programmierung ist die Modellierung des Problems zentral und stellt oft das eigentliche Problem der Optimierung dar, weil es aufgrund von zahlreichen Anwendungsgebieten kaum eine systematische Lösung bzw. Herangehensweise zur Darstellung des Prozesses gibt.

Der Anfang von jedem Optimierungsproblem beginnt beim Erkennen des Problems und der schrittweisen zunächst verbalen Beschreibung und Analyse. Im Allgemeinen werden restriktiv wirkende Daten (Nebenbedingungen) und Zielgrößen (Zielfunktion) gesucht und interpretiert. Die verbale Beschreibung geht mit der mathematischen Modellierung einher. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 2 f) Laut Definition von Martin Burger, versteht man unter einem mathematischen Modell eine berechenbare (vereinfachte) Menge von mathematischen Vorschriften, Gleichungen und Ungleichungen, die der Abbildung eines realen Vorgangs dient. Dabei ist es grundlegend, zu verstehen, dass es sich immer um eine im mathematischen Sinne Simplifizierung der Problemstellung handelt, weil eine exakt getreue Darstellung unmöglich scheint. (vgl. Burger, 2006, S. 3) Auf Grundlage des erhobenen mathematischen Systems sucht man nach einer Lösung des Problems, die darauffolgend auf die Durchführbarkeit untersucht und hinsichtlich der Nützlichkeit evaluiert wird. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 2 f)

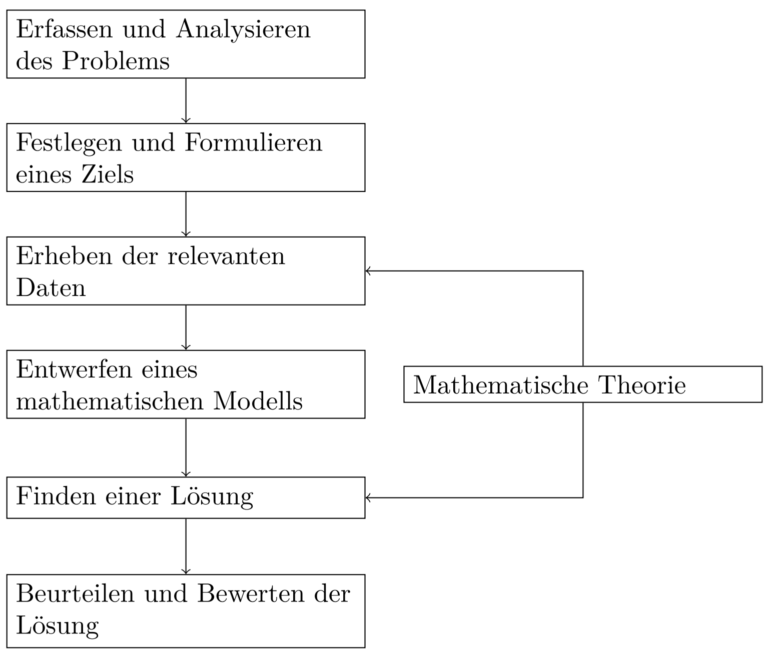

Abb. 4: OR-gestützter Planungsprozess
(eigene Darstellung in Anlehnung an Koop/Moock, 2008, S. 3)

Im Groben basiert ein vollständiger OR-gestützter Planungsprozess auf den in Abb. 4 dargestellten sechs Schritten.

3.6 Darstellung linearer Modelle anhand von ausgewählten Beispielen

Der Vorteil Linearer Optimierung liegt de facto unter anderem in der relativ einfachen Erstellung von Optimierungsmodellen. Es ist nicht nur möglich komplexe Zusammenhänge mathematisch übersichtlich darzustellen, sondern auch die Beschreibung von auf den ersten Blick nichtlinearen Problemen tut dem keinen Abbruch.(vgl. Seiffart/Manteuffel, 1974, S. 9)

Beispiel 2 (Produktionsplanung)**.** *Ein pharmazeutischer Betrieb stellt drei medizinische Präparate zur Bekämpfung einer Epidemie her, die jedoch alle etwa gleich viel Penicillin enthalten. Es bestehen allerdings Beschränkungen, die in der untentstehenden Tabelle ersichtlich sind. Wie sieht die optimale Verteilung aus, wenn eine möglichst große Gesamtmenge erwünscht ist? (vgl. Kronfellner/Peschek, 1986, S. 201)*

Abteilung	Herstellungszeit			Kapazität
	P_1	P_2	P_3	
1	-	4	10	300
2	10	3	-	500
3	4	5	2	350

Tab. 2: Tabelle zu Beispiel 2 in Anlehnung an Kronfellner/Peschek, 1986, S. 201

Mathematische Modellierung:

$$x_{P1}, x_{P2}, x_{P3} \quad \text{Anzahl der produzierten Präparate}$$

$$\max\ z = F(x_{P1}, x_{P2}, x_{P3}) = x_{P1} + x_{P2} + x_{P3}$$

$$\begin{aligned} \textbf{u.d.N. } 4x_{P2} + 10x_{P3} &\leq 300 \text{ (Kapazität Abteilung 1)} \\ 10x_{P1} + 3x_{P2} &\leq 500 \text{ (Kapazität Abteilung 2)} \\ 4x_{P1} + 5x_{P2} + 2x_{P3} &\leq 350 \text{ (Kapazität Abteilung 3)} \\ x_{P1}, x_{P2}, x_{P3} &\geq 0 \text{ (Produktion nur nichtnegativer Mengen)} \end{aligned}$$

Langwierige Berechnungen mit Hilfe des Simplex-Verfahrens ergeben die Optimallösung:

$$x_{P1} = 41, x_{P2} = 30, x_{P3} = 18.$$

Beispiel 3 (Ganzzahlige Optimierung)**.** *Ein Unternehmen, das sich auf die Herstellung von Leisten spezialisiert hat, will die Stückzahl durch optimale Verteilung erhöhen. Zur Verfügung stehen dem Unternehmen je 300 Leisten zu einer Länge von 6,5 m und 80 Leisten zu einer Länge von 5,5 m. Jedoch werden Leisten mit einer Länge von 2 m und Leisten mit einer Länge von 1,5 m gebraucht. Beachtet werden muss, dass doppelt so viele Leisten mit einer Länge von 1,5 m gebraucht werden. (vgl. Seiffart/Manteuffel, 1974, S. 20)*

Leiste zu 6,5m	Anzahl der 2-m-Leisten	Anzahl der 1,5-m-Leisten
1. Variante	3	0
2. Variante	2	1
3. Variante	1	3
4. Variante	0	4
Leiste zu 5,5m		
5. Variante	2	1
6. Variante	1	2
7. Variante	0	3

Tab. 3: Tabelle zu Beispiel 3 in Anlehnung an Seiffart/Manteuffel, 1974, S. 20 f

Mathematische Modellierung:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \quad \text{Anzahl der Anwendungen der sieben Varianten}$$

$$\max z = F(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6$$

$$\begin{aligned}
\textbf{u.d.N. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 300 \text{ (Beschränkung der Leisten zu 6,5 m)}\\
x_5 + x_6 + x_7 &= 80 \text{ (Beschränkung der Leisten zu 5,5 m)}\\
2\,(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6) &- \\
(x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7) &= 0 \text{ (Beschränkung Leistenanzahl)}\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\in \mathbb{N}_0 \text{ (Verteilung nur nichtnegativer, ganzer Anzahlen)}
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zur Darstellung von linearen Modellen stammt aus dem Bereich der Ganzzahligen Optimierung. Da ein solches Problem aber sehr komplexe Lösungsverfahren verlangt, würde die Erläuterung den Rahmen dieser VWA sprengen.

3.7 Mathematische Formulierung eines allgemeinen LP in n Variablen

Bereits in Abschnitt 3.3 haben wir das lineare Modell in zwei Variablen konkretisiert, nun wollen wir ein allgemeines Lineares Programm definieren.

Definition 2 (Lineares Optimierungsproblem)**.** „Unter einem *linearen Optimierungsproblem* bzw. einem *Linearen Programm (LP)* versteht man die Aufgabe, eine *lineare Zielfunktion* der Gestalt

$$z = F(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + d$$

zu maximieren oder zu minimieren unter den *linearen Nebenbedingungen* (Restriktionen)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad oder \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad oder \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

für $i = 1, ..., m$ und unter den *Nichtnegativitätsbedingungen*

$$x_j \geq 0$$

für einige oder alle $j = 1, ..., n$." (Koop/Moock, 2008, S. 35 f)

3.8 Lösbarkeit eines LP

Obwohl in dieser Arbeit bis zu diesem Zeitpunkt nie von Vektoren die Rede war, möchte ich diese nun kurz einführen, ohne auf genaue Definitionen einzugehen. Ein LGS bildet einen Vektorraum, weil die n-Tupel eine algebraische Struktur aufweisen, die sie sich zum Beispiel bei der Vervielfachung bzw. bei der Addition von n-Tupeln bemerkbar macht. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 12) Dieser Raum der Vektoren mit n reellen Komponenten wird mit R^n notiert, wobei in diesem Raum alle bekannten Rechenregeln für Skalare und Vektoren anwendbar sind. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 17)
Die Lösbarkeit Linearer Programme wird grundsätzlich in drei Fälle unterteilt:

1. Das Lineare Programm ist *unzulässig*, weil kein Vektor x existiert, der zulässig ist, d.h. es gibt keinen Vektor, der alle Nebenbedingungen erfüllt. Somit ist der dazugehörige Planungspolyeder leer.

2. Das Lineare Programm ist *unbeschränkt*, weil die Zielfunktion z mit Vektoren x, die alle Nebenbedingungen erfüllen, beliebig groß gemacht werden kann. Somit exisitiert keine endliche Optimallösung.

3. Das Lineare Programm besitzt mind. einen *optimalen Wert* x, weil das Lineare Programm *beschränkt* ist und der Punkt x *zulässig* ist. (vgl. Hackl, o.J., S. 3)

Weiters ist es möglich, dass es unendlich viele, endliche Optimallösungen gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn die Zielfunktion parallel zu einer Kante ist, auf der alle Punkte optimal sind. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 156)

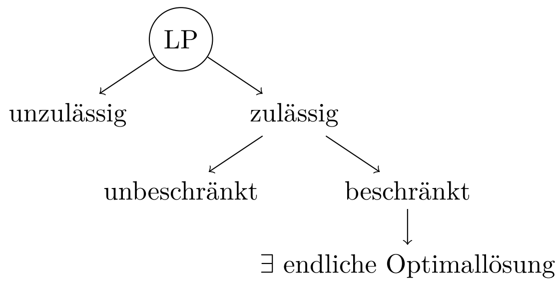

Abb. 5: Lösbarkeit eines LPs
(eigene Darstellung in Anlehnung an Hackl, o.J., S. 3)

In der unterstehenden Abbildung 6 wird die Lösbarkeit Linearer Programme anhand eines zweidimensionalen Maximierungsproblems graphisch aufgezeigt. Das linke Bild zeigt den Fall, dass kein zulässiger Vektor existiert, der Durchschnitt der Halbebenen, der Planungspolyeder dieser Aufgabe, ist somit leer. Das mittlere Bild beschreibt ein unbeschränktes Lineares Programm, weil die Zielfunktion beliebig groß gemacht werden kann. Das rechte Bild zeigt eine endliche Optimallösung.

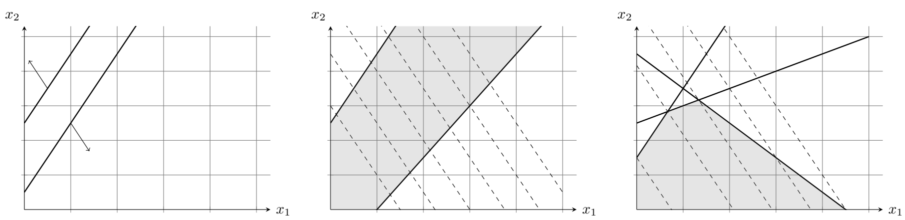

Abb. 6: Graphische Veranschaulichung der Lösungsfälle einer Maximierungsaufgabe
(eigene Darstellung)

3.9 Optimierungsprozess anhand eines Beispiels aus der Investitionsplanung

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit wollen wir anhand eines Beispiels einen vollständigen OR-gestützten Optimierungsprozess aufzeigen, dessen sechs Schritte bereits im Abschnitt 3.5 näher beleuchtet wurden.

Erfassen und Analysieren des Problems

Beispiel 4 (Investitionsplanung)**.** *Eine Werbeagentur rät einer Partei, dass noch mindestens 30 einminütige und 20 dreiminütige Werbespots auf Youtube gebraucht werden, um Wählerstimmen in jugendlichen Kreisen markant zu erhöhen. Insgesamt sollen 150 Minuten an Werbung geschaltet werden. Der Konzern Google verkauft eine einminütige Werbezeit um* $450,-$*, eine* *dreiminütige Werbezeit um* 1 000, −. *(vgl. Kronfellner/Peschek, 1985, S. 150)*

Festlegen und Formulieren eines Ziels

Das *Ziel* ist es, mit minimalen Kosten dem Rat der Werbeagentur zu folgen und die Sympathie in jugendlichen Kreisen zu erhöhen, um Wählerstimmen zu fischen.

Erheben der relevanten Daten

Im ersten Schritt sollte man sich überlegen, welche Variablen eingeführt werden müssen und wofür diese stehen.

$$x_{1min}, x_{3min} \quad \text{Anzahl der ein- bzw. dreiminütigen Werbespots}$$

Die zu minimierende Funktion, die sogenannte *Zielfunktion*, beschreibt die Kosten der Werbespots.

$$z = F(x_{1min}, x_{3min}) = 450x_{1min} + 1000x_{3min} \quad \text{Kosten der Werbespots}$$

Die letzte Frage, die sich stellt, ist, welche restriktiven Größen auf die Zielfunktion wirken. Zunächst einmal gelten die *Nichtnegativitätsbedingungen* für die Variablen, weil keine negative Anzahl an Werbespots geschaltet werden kann. Wir beschränken uns also auf den ersten Quadranten.

$$x_{1min}, x_{3min} \geq 0 \quad \text{Schaltung nur nichtnegativer Anzahl an Werbespots}$$

Zusätzlich ergeben sich folgende Nebenbedingungen aus dem Kontext des Beispiels.

$$\begin{aligned} x_{1min} + 3x_{3min} &\geq 150 \quad \text{Schaltung von mindestens 150 min Werbung} \\ x_{1min} &\geq 30 \quad \text{Schaltung von mindestens 30 einminütiger Werbespots} \\ x_{3min} &\geq 20 \quad \text{Schaltung von mindestens 20 dreiminütiger Werbespots} \end{aligned}$$

Weiters ist dieses Lineare Programm ein Problem aus der Ganzzahligen Optimierung, da die Variablen nur natürliche Werte annehmen dürfen, wobei wir dies bei der Lösung nicht weiters beachten.

$$x_{1min}, x_{3min} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{Schaltung nur nichtnegativer, ganzer Anzahlen an Werbespots}$$

Entwerfen eines mathematischen Modells

Zusammenfassend ergibt sich folgende mathematische Formulierung des vorliegenden Optimierungproblems:

Mathematische Modellierung:

x_{1min}, x_{3min} Anzahl der ein- bzw. dreiminütigen Werbespots

$$\min\ z = F(x_{1min}, x_{3min}) = 450x_{1min} + 1000x_{3min} \text{ (Kosten der Werbespots)}$$

u.d.N. $x_{1min} + 3x_{3min} \geq 150$ (Schaltung von mindestens 150 min Werbung)
$x_{1min} \geq 30$ (Schaltung von mindestens 30 einminütiger Werbespots)
$x_{3min} \geq 20$ (Schaltung von mindestens 20 dreiminütiger Werbespots)
$x_{1min}, x_{3min} \in \mathbb{N}_0$ (Schaltung nur nichtnegativer, ganzer Anzahlen an Werbespots)

Finden einer Lösung

Gesucht sind nun die Werte für x_{1min} und x_{3min}, die die Zielfunktion unter Beachtung der Nebenbedingungen minimieren. Das Lineare Programm lässt sich graphisch darstellen und lösen:

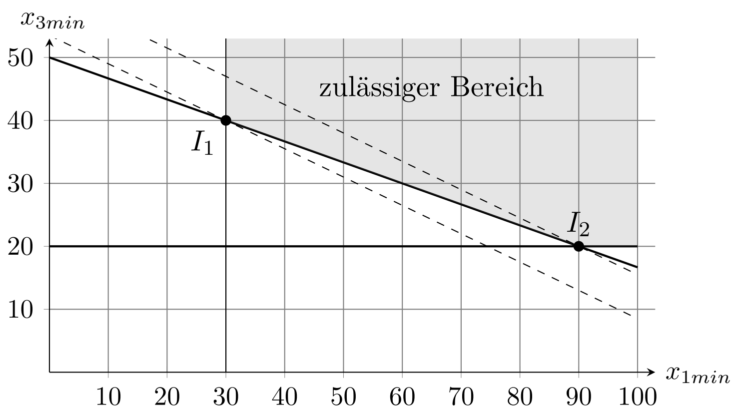

Abb. 7: Planungsvieleck und Zielfunktion des Beispiels 4
(eigene Darstellung)

Die Lösung des Ungleichungssystems entspricht der grauen Fläche, dem *Planungsbereich* dieses Beispiels, der durch den Durchschnitt der Halbebenen entstanden ist. Um die Lösung zu erhalten, verschiebt man nun die Geradengleichung $x_{3min} = -\frac{9}{20}x_{1min} + \frac{z}{20}$ parallel, die mindestens einen Punkt mit dem Planungsbereich gemeinsam hat, bis der Wert für z minimal wird. Der optimale Wert für die Zielfunktion ist am Rand des Planungsbereichs anzunehmen und beträgt

$$\min\ 450x_{1min} + 1000x_{3min} = 450 \cdot 30 + 1000 \cdot 40 = 53\ 500.$$

Beurteilen und Bewerten der Lösung

Es existieren Werte, die alle Nebenbedingungen erfüllen, und somit *zulässig* sind. Zusätzlich ist der Planungsbereich nach oben hin *unbeschränkt*, was bei einer Maximierungsaufgabe in diesem Kontext zur Folge hätte, dass es keinen endlichen, optimalen Wert gibt.
Da es sich aber um eine Minimierungsaufgabe handelt, weiß die Partei, dass sie 30 einminütige und 40 dreiminütige Werbespots schalten muss, um dem Rat der Agentur zu folgen. Ihre Kosten belaufen sich auf $53\,500,-$, die das Minimum unter den Anforderungen darstellen und somit optimal sind.

4 Resümee

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die Kenntnis von einfachen Mitteln der Mathematik, die laut mehreren Schüler*innen für ihren Alltag scheinbar sinnlos erscheinen, brauchbar und zweckmäßig ist, wie das Tool der Linearen Optimierung zeigt. Aus meiner Sicht ist es erstrebenswert, diesen Bereich wieder in den Mathematiklehrplan der AHS zu implementieren, denn zahlreiche Argumente sprechen dafür:

- Bei Linearen Programmen, die auf zwei Variablen beschränkt sind, ist es bereits mit geringen Aufwand möglich, Schüler*innen die Methoden der Linearen Optimierung zu vermitteln.
- Schüler*innen erfahren, wie konkret Mathematik in der Wirtschaft eingesetzt wird.
- Schüler*innen kann gezeigt werden, dass eine fundierte Kenntnis von *linearen Ungleichungen und Gleichungen* sinnvoll ist.
- Die Anwendung der Linearen Optimierung bietet die Möglichkeit, Schüler*innen begreifbar zu machen, dass Mathematik sehr vielfältigen Einsatz findet und die Basis für viele Abläufe bildet.
- Praxisnahe Anwendungen erleichtern das Lernen und können das Interesse an der Mathematik fördern.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

Blaha, M. (o.J.): Ungleichungen, Ungleichungssysteme. URL: https://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-03.pdf [Zugriff: 24.8.2018].

Brünner, A. (o.J.): Zitate über Mathematik. URL: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/zitate.htm [Zugriff: 2.11.2018].

Burger, M. (2006): Mathematische Modellierung. Vorlesungskriptum. Münster. URL: https://www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/Modellierung_06/skript.pdf [Zugriff: 22.7.2018].

Burkard, R. (o.J.): Einführung in die Mathematische Optimierung. Vorlesungsskriptum. Graz. URL: https://www.opt.math.tugraz.at/~hatzl/Vorlesungen/MathoptSS09/Opt.pdf [Zugegriff: 25.8.2018].

Dudenredaktion (o.J.): "Polyeder" auf Duden online. URL: https://www.duden.de/node/717441/revisions/1136408/view [Zugriff: am 26.8.2018].

Embacher, F./Oberhuemer, P. (o.J.): Matrizen. URL: https://www.mathe-online.at/mathint/matr/i.html [Zugriff: 03.9.2018].

Hackl, B. (o.J.): Lineare Optimierung. Theoriezusammenfassung kompakt. Version 1.00 [Anhang einer Email von Phillip Hungerländer, 11.7.2018].

Kaufmann, J. (1991): *Algebra with Trigonometry for College Students*. Boston: PWS Publishers.

Keil, D. (o.J.): Cramer'sche Regel. URL: http://www.abi-mathe.de/buch/matrizen/cramersche-regel/ [Zugriff: 13.8.2018].

Koop, A./Moock, H. (2008): *Lineare Optimierung: Eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research*. Berlin Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kronfellner, M./Peschek, W. (1985): *Angewandte Mathematik 1.* Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Kronfellner, M./Peschek, W. (1986): *Angewandte Mathematik 3.* Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Scheid, H./Schwarz, W. (2009): *Elemente der Linearen Algebra und der Analysis*. Berlin Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schneider, A. (o.J.): Lineare Optimierung. URL: https://www.mathebibel.de/lineare-optimierung [Zugriff: 24.8.2018].

Schwarz, A. (o.J.): Lineare Optimierung. Lehrbuch mit Aufgaben und Lösungen. URL: https://www.mathe-aufgaben.com/uploads/media/Leseprobe_Lineare_Optimierung.pdf [Zugriff: 5.11.2018].

Seiffart, E./Manteuffel, K. (1974): *Lineare Optimierung.* Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Sonne, B./Weiß, R. (2013): *Einsteins Theorien: Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für interessierte Einsteiger und zur Wiederholung.* Berlin Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Stobitzer, C. (o.J.): Obere und Untere Schranke / Supremum und Infimum. URL: http://www.mathepauken.de/schranken-obere-untere-supremum-infimum.php [Zugriff: 4.11.2018].

TutorCircle-Editorship (o.J.): Cramer's Rule. URL: http://math.tutorcircle.com/algebra-2/cramers-rule.html#proof [Zugriff: 22.7.2018].

Wohlgemuth, M. (2009): *Mathematisch für Anfänger.* Berlin Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

A

Mathematische Grundlagen

Im Anhang A möchte ich noch mathematische Grundlagen ansprechen, die für komplexere Aufgaben der Linearen Optimierung von besonderer Wichtigkeit sind. Insbesondere wird auf die Algorithmen zur Lösung von linearen Gleichungssysteme eingegangen, die die Basis für Lösungsverfahren von Optimierungsproblemen bilden.

A.1 Matrizenschreibweise

Ein zentrales Element zur Lösung und Darstellung von linearen Zusammenhängen sind Matrizen, deren Vorteil es ist, LGS übersichtlich darzustellen. Weiters sind Konstrukte wie Determinante und Inverse einer Matrix Instrumente zur Angabe von Lösungsfällen. (vgl. Embacher/Oberhuemer, o.J.)

Definition 3. Unter einer Matrix versteht man ein rechteckiges Zahlenschema, das allgemein aus n Zeilen und m Spalten besteht, welche damit definitionsgemäß eine $m \times n$-Matrix (sprich: m mal n-Matrix) ist. Die $n \cdot m$ vorkommenden Elemente einer Matrix nennt man Komponenten der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \text{ (vgl. Embacher/Oberhuemer, o.J.)}$$

Die transponierte Matrix entsteht durch Vertauschung der Zeilen- und Spalten der eigentlichen Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Diese neue Matrix wird als $A^T = (a'_{ji}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ notiert, wobei für $a'_{ji} = a_{ij}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und für $i = 1, 2, \ldots, m$ gilt. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kann also als eine $n \times 1$-Matrix definiert werden. Somit kann das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ auch in der Form $x^T y$ angeschrieben werden. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 18)

A.2 Lineare Gleichungssysteme

Definition 4. Nach der Definition von Harld Scheid und Wolfgang Schwarz nennt man eine algebraische Gleichung linear, wenn die Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ nur in der ersten Potenz und nicht als Produkte vorkommen. Somit ist die Gleichung der Art $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ bzw. $\sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b$. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 3)
Sind mehrere algebraische Gleichungen ersten Grades gegeben, deren mathematische Korrektheit gleichzeitig erfüllt sein sollte, spricht man von einem linearen Gleichungssystem. Ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und m Gleichungen besitzt die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

(vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 3)

Die Koeffizienten des Systems sind $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ und $x_j \in \mathbb{R}$ die Unbekannten. Das obige System kann nun mithilfe des Summenzeichens verkürzt dargestellt werden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{für } i = 1, ..., m.$$

Wenn wir zusätzlich die Systemmatrix (Koeffizientenmatrix) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und die Vektoren $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

definieren, erlaubt diese Matrixschreibweise, das System in die vereinfachte Form **Ax=b** zu bringen. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 18 f)
Zusätzlich wird ein solches Gleichungssystem als homogen bezeichnet, wenn für alle $i \in \{1, 2..., m\}$ gilt: $b_i = 0$. Somit wäre null (für alle Unbekannten x_j) eine Lösung des Systems. Andernfalls heißt es inhomogen. (vgl. Wohlgemuth, 2009, S. 95)

A.3 Transformation eines linearen Ungleichungssystems in ein LGS

Bei der Lösung linearer Ungleichungssysteme in mehr als zwei Variablen wird das System in ein LGS umgewandelt. Dazu werden sogenannte Schlupfvariablen eingeführt, was bei Linearen

Programmen dazu führt, dass außer den Nichtnegativitätsbedingungen nur Gleichungen auftreten. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 156)
Nebenbedingungen des Beispiels 1 als transformiertes LGS:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad + x_3 \quad\quad &= 40 \\
200x_1 + 600x_2 \quad + x_4 \quad &= 12\,000 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0) \\
5x_1 + 10x_2 \quad\quad + x_5 &= 240.
\end{aligned}
$$

(vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 156)

A.4 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Nach der Definition linearer Gleichungssysteme und der Notation, stellt sich jetzt die Frage, wie man die Lösungsmenge eines solchen Systems bestimmt. Bereits in der Schule hat man verschiedene Verfahren gelernt, wie das Additionsverfahren, das Einsetzverfahren oder das Gleichsetzungsverfahren – um einige zu nennen. Für Gleichungssysteme größerer Dimension werden solche Verfahren aber schnell zu langwierig. Die Idee ist es nun, die gegebenen Verfahren zu formalisieren bzw. zu generalisieren, sodass jeder Schritt allgemein festgelegt ist und falls notwendig oder erwünscht auch programmiert werden kann. (vgl. Wohlgemuth, 2009, S. 97)

A.4.1 Gauß'sche Algorithmus

Der Gauß'schen Algorithmus macht sich das Prinzip zu Nütze, dass elementare Umformungen zwar das System verändern, aber die Lösung erhalten bleibt. Ziel dieser Methode ist es, das Schema so umzuformen, dass die Lösung möglichst einfach eruierbar ist. Alle komplexeren linearen Optimierungsprobleme basieren auf dieser Anwendung. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 24)

Es liegt ein beliebiges lineares Gleichungsystem vor. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 24)

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

Die folgenden Operationen ändern die Lösungsmenge des Systems nicht und sind somit zulässig:

- Vertauschung von Zeilen oder Spalten
- Multiplikation einer Zeile mit einem von null verschiedenen Element $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 24)

Vorgehensweise:

1. Wir bezeichnen die Spalten der Matrix mit $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Wir prüfen, ob der oberste Eintrag der ersten Spalte ungleich null ist. Tritt dies nicht ein, vertauschen wir Zeilen, sodass der oberste Eintrag ungleich null ist, um eine Division durch null zu vermeiden.
2. Nun nehmen wir an, dass $a_{11} \neq 0$ ist und bringen alle Einträge unter a_{11} auf null, indem wir iterativ das $(-1) \cdot \frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile zur i-ten Zeile addieren. Die erweiterte Koeffizientenmatrix besitzt jetzt eine solche Gestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)}. \end{array}\right)$$

3. All jene Einträge $a_{ij}^{(2)}, b_i^{(2)}$ mit $i = \{2, 3, ..., m\}$ und $j = \{2, 3, ..., n\}$ sind diejenigen Komponenten, die sich nach Schritt 1 verändert haben. Nun betrachten wir vorübergehend die Teilmatrix $A^{(2)}|b^{(2)}$ mit den Spalten $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, ..., A_{n-1}^{(2)}$ und wiederholen analog bei Schritt 2.
4. Dieses Verfahren setzten wir fort, bis entweder in einer entstehenden Teilmatrix nur mehr Nullspalten existieren oder wir die letzte Zeile bzw. Spalte erreicht haben. (vgl. Wohlgemuth, 2009, S. 98 ff)

Ergebnis dieser Zeilenumformung sollte sein, dass jede Zeile der Koeffizientenmatrix, welche keine Nullzeile ist, mit je einer null mehr beginnt. Eine Systemmatrix dieser Art bezeichnet man als Zeilenstufenform. Jener Eintrag der Zeilen, der von null verschieden ist, stellt das Pivotelement dar. (vgl. Wohlgemuth, 2009, S. 100)

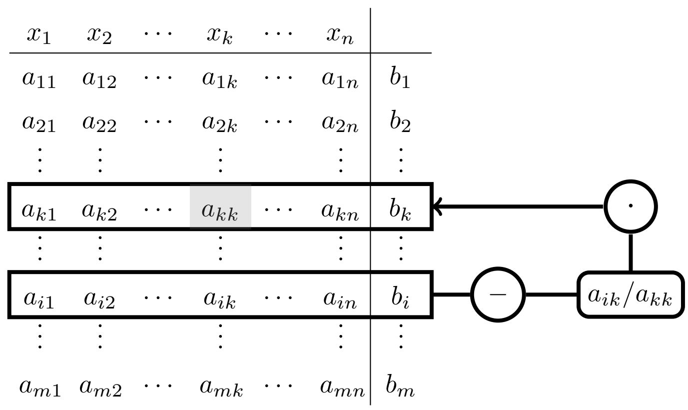

Abb. 8: Illustration zum Gauß'schen Algorithmus
(eigene Darstellung in Anlehnung an Koop/Moock, 2008, S. 27)

A.4.2 Lösungsfälle linearer Gleichungssysteme

Im nächsten Abschnitt versuchen wir die Lösungsfälle genau zu definieren und zu beschreiben. Dabei wissen wir schon von der Schule, dass ein lineares Gleichungssystem entweder eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Um das Eintreten der Lösungsfälle genau bestimmen zu können, müssen wir zuvor noch zwei Begriffe einführen: die lineare Abhängig- bzw. Unabhängigkeit und den Rang einer Matrix.

Definition 5. Laut Harald Scheid und Wolfang Schwarz heißt eine Menge A von Vektoren aus einem Vektorraum V linear unabhängig, wenn eine Gleichung der Form $r_1\vec{a_1}+r_2\vec{a_2}+...+r_n\vec{a_n} = \vec{0}$ mit $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A$ nur mit $r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$ zu einer mathematisch korrekten Aussage führt. Anderfalls nennt man die Vektormenge linear abhängig. (vgl. Scheid/Schwarz, 2009, S. 14)
Daraus folgt, dass sich bei linearer Abhängigkeit mindestens ein Vektor aus Linearkombinationen der anderen berechnen lässt. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 20)

Definition 6. Der Rang $r(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zählt die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von A. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 22)
Dabei äquivaliert die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren bzw. der linear unabhängigen Spaltenvektoren der transponierten Matrix A^T mit der Anzahl der linear unabhänigen Spaltenvektoren von A. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 22) Um den Rang der Koeffizientenmatrix zu bestimmen, zählt man die Anzahl der nullverschiedenen Zeilen der Matrix in Zeilenstufenform. (vgl. Wohlgemuth, 2009, S. 110)
Diese Begriffe helfen uns nun, die Lösungsfälle eines Gleichungssystems ersten Grades genau zu charakterisieren. Dazu definieren wir vorerst die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}.$$

Satz 1. *„Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,$b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $r(A) = r(A|b)$. Gilt zusätzlich $r(A) = n$, so gibt es genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Im Falle $r(A) < n$ gibt es unendlich viele Lösungen mit $n - r(A)$ freien Parametern.“ (Koop/Moock, 2008, S. 22)*
Gibt es nun mehr Variablen als Gleichungen ($m < n$), kann man schon sagen, dass das System keine eindeutige Lösung besitzt. (vgl. Koop/Moock, 2008, S. 23)

A.4.3 Determinante zur Lösung von LGS und Bestimmung des Ranges

Die Determinante und die Cramer'sche Regel, die im Folgenden beschrieben werden, sollen die Zusammenhänge der Algebra aufzeigen und Ausblick über die Möglichkeiten zur Lösung von LGS geben.

Definition 7. Die Determinante ist eine Zahl (Skalar), die einer quadratischen Matrix ($m = n$) zugeordnet wird und aus ihren Komponenten berechnet wird. Die Determinante einer 3×3-Matrix A ist definiert durch

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \text{ (vgl. Kaufmann, 1991, S. 582 ff)}$$

Satz 2 (Cramer'sche Regel)**.** *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m = n$ eine reguläre Matrix (invertierbar; sprich $det\,(A) \neq 0$) und seien $b \in \mathbb{R}^m$ die konstanten Glieder des Systems, dann hat das System die eindeutige Lösung*

$$x_i = \frac{1}{det\,(A)} \cdot det\,(A_j)\,. \text{ (vgl. Keil, o.J.)}$$

Somit kann man mithilfe der Cramer'schen Regel bei $det\,(A) = 0$ angeben, dass das LGS keine eindeutige Lösung besitzt und mit anderen Methoden bestimmen, ob es unter- oder überstimmt ist. Analog kann man bei $det\,(A) \neq 0$ die Lösung explizit angeben. (vgl. Kaufmann, 1991, S. 585)

Lemma 1. Laut Wohlgemuths Definition gilt für die Multiplikation zweier Determinanten: $det\,(AB) = det\,(A) \cdot det\,(B)$. (vgl. Wohlgemuth, 2009, S. 141)

Beweis 1. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ und $m = n$. Betrachtet wird ein LGS, dessen $det\,(A) \neq 0$ ist, was impliziert, dass das System eine eindeutige Lösung besitzt.

Man ersetzt die j-te Spalte der Einheitsmatrix mit dem Lösungsvektor x und nennt diese Matrix X_j. Damit ist $AX_j = A_j$, wobei die j-te Spalte der Koeffizientenmatrix durch b ersetzt wurde.

Da $det\,(X_j) = x_j$ ist, folgt

$$\begin{aligned} det\,(A) \cdot det\,(X_j) &= det\,(A_j) \\ x_j &= det\,(A)^{-1} \cdot det\,(A_j)\,. \end{aligned}$$

Da die Matrix A nach Voraussetzung regulär ist, existiert $det\,(A)$. (vgl. TutorCircle-Editorship, o.J.) □

B Programm

Im Anhang B wird der in der Arbeit angesprochenen Algorithmus zur Lösung von LGS als C++-Programm dargestellt. Auf die Optimierung hinsichtlich Effizienz und Geschwindigkeit wurde verzichtet. Es handelt sich vielmehr um einen Versuch, besprochene Verfahren mit dem Computer umzusetzen und zu generalisieren, um komplexere Aufgaben zu lösen.

B.1 Gauß'scher Algorithmus

```
//
//–PARAMETER––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––
// Typ                          Name          Beschreibung
//––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––––
// int                          m             Anzahl der Gleichungen
// int                          n             Anzahl der Variablen
// int                          k             Pivotindex
// min                          min           Minimum unter m und n
// int                          r             Rang der Matrix
// int                          maxindex      Index des Maximums
// double                       max           Maximum
// vector <double>              swap          Hilfsvektor
// vector <vector <double> >    matrix        erweiterte Koeffizientenmatrix


#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

void printmatrix(vector <vector <float> > pmatrix){
    for(int i=0;i<pmatrix.size();i++){
        for(int j=0;j<pmatrix[i].size();j++){
            cout<<pmatrix[i][j]<<" ";
            if(j==(pmatrix[i].size()-2)){
                cout<<"| ";
```

```
            }
        }
        cout<<endl;
    }
}

void rangmatrix(vector <vector <float> > rmatrix){
    int r=0,h=0;
    for(int i=0;i<rmatrix.size();i++){
        for(int j=0;j<(rmatrix[i].size()-1);j++){
            if(rmatrix[i][j]==0){
                h++;
            }
        }
        if(h!=(rmatrix[i].size()-1)){
            r++;
        }
        h=0;
    }

    cout<<"r(A) = "<<r<<endl;
    r=0;

    for(int i=0;i<rmatrix.size();i++){
        for(int j=0;j<rmatrix[i].size();j++){
            if(rmatrix[i][j]==0){
                h++;
            }
        }
        if(h!=rmatrix[i].size()){
            r++;
        }
        h=0;
    }

    cout<<"r(A|b) = "<<r<<endl;
}

int main(int argc, const char * argv[]) {

    vector<vector <float> >matrix;
    int n,m;
    float component;

    // Eingabe der erweiterten Koeffizientenmatrix
    cout<<"Geben Sie die Anzahl der Variablen und Gleichungen Ihres LGS ein:"<<
    endl<<"Anzahl der Variablen; n = ";
    cin>>n;

    cout<<"Anzahl der Gleichungen; m = ";
```

```
cin>>m;

cout<<endl<<"Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix jeweils zeilenweise
ein:"<<endl;
for(int i=0;i<m;i++){
    vector<float>temp;
    for(int j=0;j<=n;j++){
        if(j==n){
            cout<<"Komponent b_"<<(i+1)<<" = ";
        }
        else{
            cout<<"Komponent a_"<<(i+1)<<(j+1)<<" = ";
        }
        cin>>component;
        temp.push_back(component);
    }
    cout<<endl;
    matrix.push_back(temp);
}

cout<<endl<<"Ausgangsmatrix:"<<endl;
printmatrix(matrix);

// Gauss
int k=0, i=k, maxindex,min;
float max;
vector <float> swap(n);

if(m<n){
    min=m;
}
else{
    min=n;
}

while(k<min){

    // Pivotsuche (Maxiumstrategie)
    max=matrix[k][k];
    maxindex=k;
    i=k+1;
    while(i<m){
        if(max<matrix[i][k]){
            max=matrix[i][k];
            maxindex=i;
        }
        i++;
    }

    if(max!=0){
```

```

            // Zeilenvertauschung
            swap=matrix[maxindex];
            matrix[maxindex]=matrix[k];
            matrix[k]=swap;

            // Berechnungen
            i=k+1;
            while(i<m){
                for(int j=0;j<=n;j++){
                    swap[j]=(-1)*(matrix[i][k]/matrix[k][k])*matrix[k][j];
                }
                for(int j=0;j<=n;j++){
                    matrix[i][j]=matrix[i][j]+swap[j];
                }
                i++;
            }}
        k++;
    }

    cout<<endl<<"Trapezgestalt:"<<endl;
    printmatrix(matrix);

    cout<<endl<<endl;

    rangmatrix(matrix);

    return 0;
}
```

Listing 1: Gauß'scher Algorithmus

Dieses angegebene Programm transformiert nach Eingabe des LGS die Systemmatrix in Zeilenstufenform und berechnet den Rang der Matrix. In der Abbildung 9 ist das Verfahren anhand eines Flowcharts bildlich dargestellt.

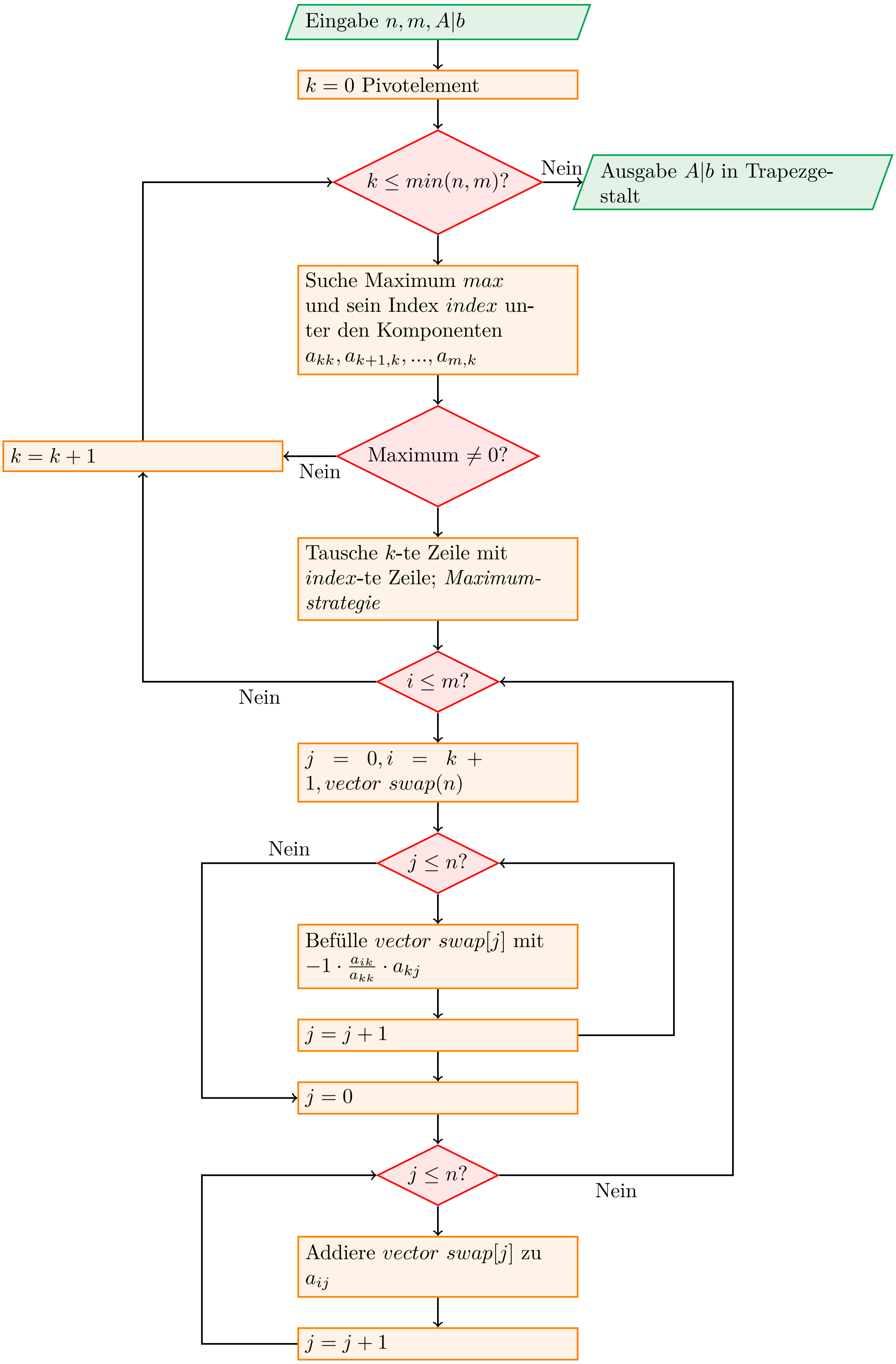

Abb. 9: Flowchart des Gauß'schen Algorithmus
(eigene Darstellung)

C Transkript

Ich möchte mich nochmal bei DDr. Philipp Hungerländer für die Möglichkeit bedanken, ein Experteninterview mit ihm zu führen und seine Expertise zu dem Thema Operations Research zu hören, die mir Einblicke in die praktische Welt gab, aber auch das theoretische Konstrukt hinter der mathematischen Optimierung aufzeigte.

Das Interview mit Herrn DDr. Philipp Hungerländer wurde an der Alpen-Adria-Universität in Klagenfurt am 23.07.2018 geführt. Im Transkript wurden die Abkürzungen **B** (Befragter) für die Wortmeldungen von Herrn DDr. Philipp Hungerländer und **I** (Interviewer) für die Wortmeldungen des Autors verwendet.

I: Die erste Frage wäre: Was war bezüglich Optimierung Ihr letztes Projekt, an dem Sie gearbeitet haben?

B: Und das ist für Ihre Arbeit relevant? (*lacht*)

I: Nicht wirklich. Das ist nur eine einsteigende Frage, die mich interessieren würde.

B: Also im Moment, arbeite ich an Projekten mit der Rail Cargo zum Beispiel, über das darf ich reden. Da geht es darum, die Auslastung von den Lokomotiven zu optimieren. Also da hat man eine Menge von Zügen in Österreich, die durchgeführt werden sollten, vorgegeben und dann sucht man eine Zuordnung, also die vorhandenen Lokomotiven so den Zügen zuzuordnen, dass man möglichst wenig Lokomotiven braucht, um alle Züge durchzuführen. Da gibt es eine Menge von Nebenbedingungen, die man beachten muss - wie Wartung der Lokomotive und so weiter, nach gewisser Kilometeranzahl. Und wenn wir es da schaffen, fünf Prozent der Lokomotiven einzusparen, ist das eine hohe Kostenreduktion für die ÖBB, weil jede Lokomotive sehr teuer ist.

I: Und welche Optimierung oder welche Grundlagen werden dabei verwendet, um da zu optimieren? Ist das rein Lineare Optimierung?

B: Lineare Optimierung nicht, das ist eine Ganzzahlige Optimierung, also Ganzzahlige Optimierungsprozesse sind ja grundsätzlich. Man muss Lineare Optimierung verstehen, um Ganzzahlige Optimierungsprobleme verstehen zu können, weil da kommen halt zusätzlich zum LP noch Ganzzahligkeitsbedingungen für die Variablen dazu und das macht das Ganze wesentlich schwieriger, das effizient zu lösen. Deswegen verwenden wir auch - typischerweise in der Praxis - Heuristiken, die auf das Problem speziell zugeschnitten sind, aber das geht dann wahrscheinlich zu weit. Aber die Lineare Optimierung ist auf alle Fälle eine notwendige Grundlage für alles, was wir dort machen. (...) Bei Ganzzahligen Optimierungsprobleme hat man einen Baum, wo man dann die einzelnen Variablen fixiert und in jedem Knoten von dem Baum löst man wieder ein Lineares Programm. Also Lineare Programme sind auch algorithmisch die Grundlage zum Lösen Ganzzahliger Optimierungsprobleme.

I: Also funktioniert die Anwendung Linearer Optimierung auch in komplexeren Situationen?

B: Lineare Optimierung selbst ist zu wenig, aber es ist eine Subroutine für komplexere Algorithmen, die dann in der Praxis eingesetzt werden.

I: Und gibt es dabei außer Simplex-Verfahren andere? Verwenden Sie da auch andere Verfahren zur Lösung?

B: Also es gibt Verfahren: es gibt die Innere-Punkte-Methode, die im Gegensatz zum Simplex-Verfahren auch nachgewiesen polynomielle Laufzeit hat. Das Simplex-Verfahren kann ja immer eine exponentielle Laufzeit haben. Entsprechend ist das theoretisch wichtig, diese Innere-Punkte-Methode, und in den Solvern, die wir haben, kann man dann einfach umstellen, ob man jetzt mit Simplex oder Innere-Punkte-Methode lösen will. Typischerweise ist aber Simplex für die Praxis schneller, überhaupt für die Ganzzahligen Optimierungsprobleme, weil man immer wieder einen Restart machen muss, von ähnlichen Problemen, und da haben diese Aktive-Mengen-Methoden eben bessere Restartfähigkeiten.

I: Aber die unterscheiden sich nur in der Laufzeit und der Herangehensweise?

B: Genau, in der Laufzeit für die jeweilige Probleminstanz unterscheiden sie sich manchmal. Manchmal ist das Simplex-Verfahren schneller, manchmal ist das Innere-Punkte-Verfahren schneller. Aber in der Praxis wird meistens dann, wenn Lineare Optimierung als Subroutine eingesetzt wird, das Simplex-Verfahren verwendet.

I: Welche Computersysteme verwenden Sie, um das zu lösen? Welche Solver?

B: Wir haben einen Server, da an der Uni stehen und da geht man dann mit SSH hin. Da kann man dann auch mehrere Berechnungen gleichzeitig starten, weil er einen entsprechend großen Arbeitsspeicher hat - und Kerne. Selber am Rechner, arbeite ich nur, um zu testen. Wenn ich dann echtes Benchmarking brauche, mache ich das eigentlich immer am Server.

I: In welcher Programmiersprache ist das?

B: Wenn wir diese Solver verwenden, um sie anzusprechen und die Daten aufzubereiten, verwenden wir typischerweise Java, weil da Kosten-Nutzen am besten ist, sozusagen, weil es wesentlich schneller geht als in C++ oder C und die eigentliche Rechnerei dann im Solver passiert. Wenn man dann diese maßgeschneiderten Heuristiken baut, ist es eine Kombination aus Java und C. Die rechenintensiven Operationen werden dann halt in einer performanteren Programmiersprache umgesetzt. Die weniger rechenintensiven dann in Java, weil es einfach wesentlich schneller programmiert ist.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, dass ich

- die vorliegende vorwissenschaftliche Arbeit selbständig und ohne Hilfe Dritter verfasst habe,
- die Inhalte, die ich aus Werken Dritter wortwörtlich oder sinngemäß übernommen habe, in geeigneter Form gekennzeichnet und den Urspung der Information durch möglichst exakte Quellangaben ersichtlich gemacht habe.

Mir ist bekannt, dass die digitale Version der eingereichten wissenschaftlichen Arbeit zur Plagiatskontrolle herangezogen wird.

Außerdem ist mir bewusst, dass eine tatsachenwidrige Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Zusätzlich erkläre ich mich damit einverstanden, dass die vorliegende Arbeit für schulische Zwecke benutzt werden kann.

Markus Tripp, e.h. Spittal/Drau, am 14. Februar 2019