Kann scheinbar **abstrakte Mathematik**
uns helfen,
die Welt besser zu **verstehen**?

Abbildung: Weihnachtsmarkt Laibach

Abbildung: Pi Day: 14. März

Lineare Optimierung anhand von Beispielen

Theme in Anlehnung an Benjamin Hackl

Beispiel: Investitionsplanung

- **Elsa** $\rightarrow$ Klima-Aktivistin

Beispiel: Investitionsplanung

- **Elsa** $\rightarrow$ Klima-Aktivistin

Investitionsplanung

- Schule benötigt monatlich **Kreiden**, **Druckpapier** und **biologische Reinigungsmittel**

Beispiel: Investitionsplanung

- **Elsa** $\rightarrow$ Klima-Aktivistin

Investitionsplanung

- Schule benötigt monatlich **Kreiden**, **Druckpapier** und **biologische Reinigungsmittel**
- **Ziel:** Minimierung der durch die Bestellung entstehenden CO_2-Emissionen

Restriktiv wirkende Daten

	Lieferset S_1	Lieferset S_2	Mindestbedarf
Kreide	5 Pkg.	2 Pkg.	26 Pkg.
Druckpapier	1 Pkg.	1 Pkg.	10 Pkg.
Reinigungsmittel	1 Pkg.	4 Pkg.	16 Pkg.
CO_2-Emissionen	20kg/Lieferset	50kg/Lieferset	

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion $\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$

Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$

Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion

$$\min z = F(x_1, x_2) = \underbrace{20x_1}_{CO_2\text{-Menge durch Lieferset } S_1} + 50x_2$$

Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$

Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + \underbrace{50x_2}_{CO_2\text{-Menge durch Lieferset } S_2}$$

Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$

Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion	$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$
Nebenbedingungen	$5x_1 + 2x_2 \geq 26 \rightarrow$ Bedarf an Kreide $x_1 + x_2 \geq 10$ $x_1 + 4x_2 \geq 16$
Nichtnegativitätsbedingungen	$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$

Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$

$x_1 + x_2 \geq 10 \rightarrow$ Bedarf an Druckpapier

$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$

Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$

Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16 \rightarrow \text{ Bedarf an Reiniger}$$

Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$

Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$

Nichtnegativitätsbedingungen

$x_1 \geq 0 \rightarrow$ pos. Anzahl an Liefersets S_1

$x_2 \geq 0$

Mathematische Formulierung des Problems

Zielfunktion $\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$

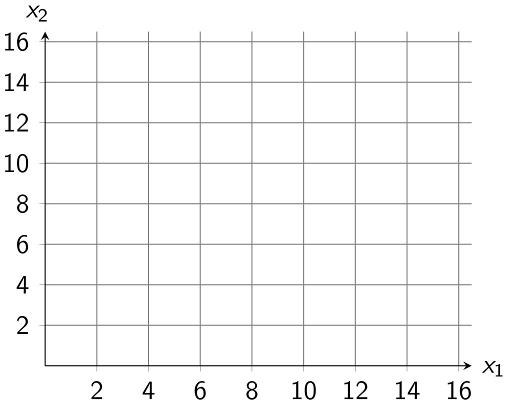
Nebenbedingungen

$$5x_1 + 2x_2 \geq 26$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$

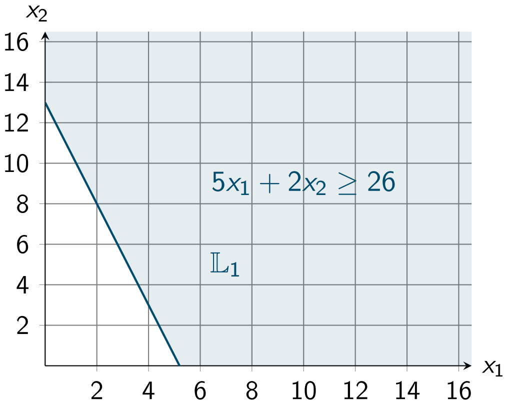
Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geq 0$$
$x_2 \geq 0 \rightarrow$ pos. Anzahl an Liefersets S_2

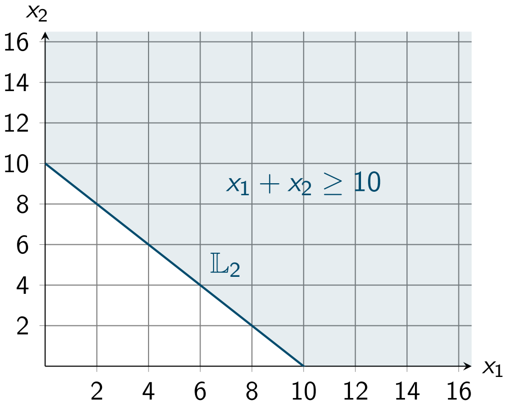
Graphische Interpretation der Ungleichungen



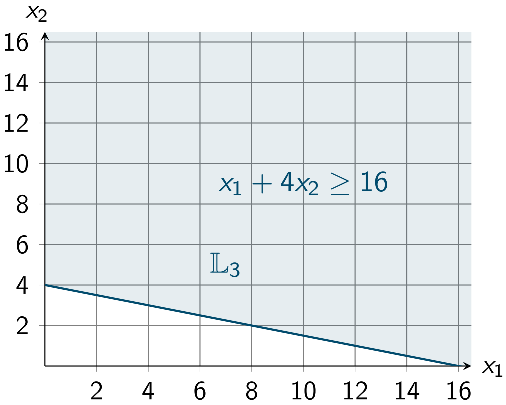
Graphische Interpretation der Ungleichungen



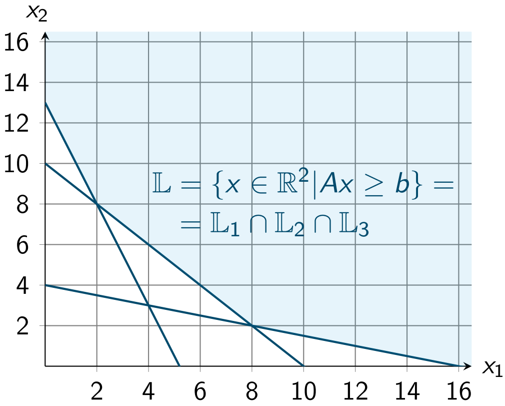
Graphische Interpretation der Ungleichungen



Graphische Interpretation der Ungleichungen



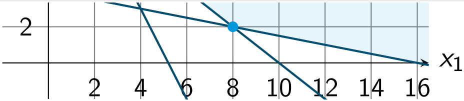
Graphische Interpretation der Ungleichungen



Bestimmung der optimalen Lösung

Umformung der Zielfunktion

$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2 \Leftrightarrow g : x_2 = -0.4x_1 + \frac{z}{50}$

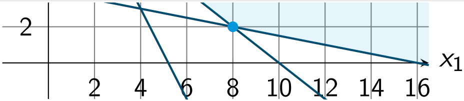


Bestimmung der optimalen Lösung

Umformung der Zielfunktion

$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2 \Leftrightarrow g : x_2 = -0.4x_1 + \frac{z}{50}$

- z **minimal** $\rightarrow$ g erreicht durch Parallelverschieben **ersten Punkt** von $\mathbb{L}$

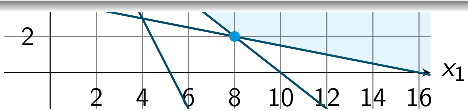


Bestimmung der optimalen Lösung

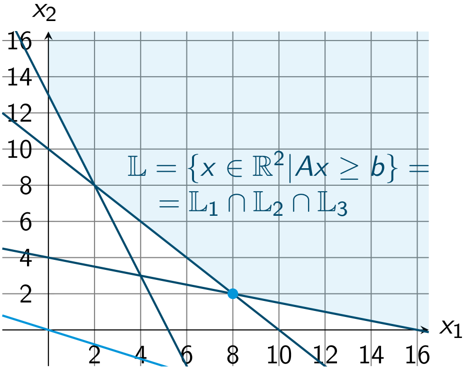
Umformung der Zielfunktion

$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2 \Leftrightarrow g : x_2 = -0.4x_1 + \frac{z}{50}$

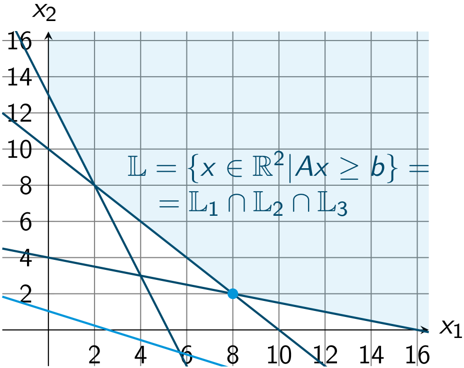
- z **minimal** $\rightarrow$ g erreicht durch Parallelverschieben **ersten Punkt** von $\mathbb{L}$
- **optimaler** Punkt liegt am **Rand** des $\mathbb{L}$ der Nebenbedingungen



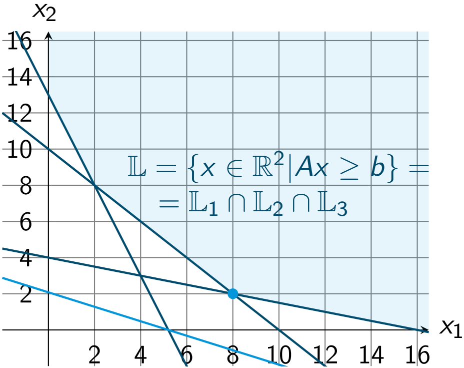
Bestimmung der optimalen Lösung



Bestimmung der optimalen Lösung

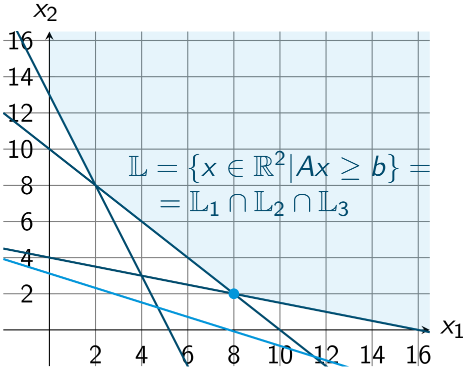


Bestimmung der optimalen Lösung

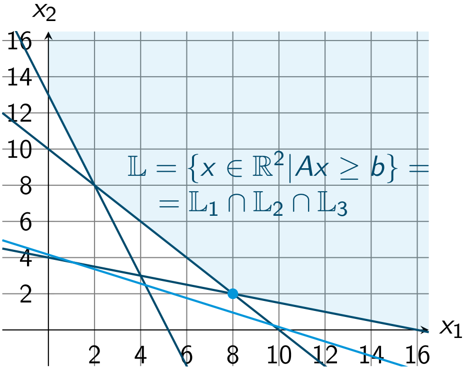


$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^2 | Ax \geq b\} = \\ = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$$

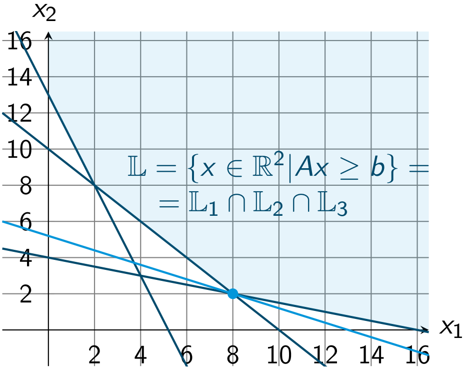
Bestimmung der optimalen Lösung



Bestimmung der optimalen Lösung



Bestimmung der optimalen Lösung



Lösung

Lösung

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$

Lösung

Lösung

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$
$$= 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 = 5.2 \cdot 50 = 260\text{kg}$$

Lösung

Lösung

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$
$$= 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 = 5.2 \cdot 50 = 260\text{kg}$$

Kontext:

- 8 Liefersets S_1 und 2 Liefersets S_2

Lösung

Lösung

$$\begin{aligned}\min z = F(x_1, x_2) &= 20x_1 + 50x_2 \\ &= 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 = 5.2 \cdot 50 = 260\text{kg}\end{aligned}$$

Kontext:

- 8 Liefersets S_1 und 2 Liefersets S_2
  - Sättigung des Bedarfs

Lösung

Lösung

$$\min z = F(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2$$
$$= 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 = 5.2 \cdot 50 = 260\text{kg}$$

Kontext:

- 8 Liefersets S_1 und 2 Liefersets S_2
  - Sättigung des Bedarfs
  - Minimierung der CO_2-Emissionen

Lösung

Lösung

$$\begin{aligned} \min z = F(x_1, x_2) &= 20x_1 + 50x_2 \\ &= 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 = 5.2 \cdot 50 = 260\text{kg} \end{aligned}$$

Kontext:

- 8 Liefersets S_1 und 2 Liefersets S_2
  - Sättigung des Bedarfs
  - Minimierung der CO_2-Emissionen

$\blacksquare$

q.e.f.

Kann scheinbar **abstrakte Mathematik**
uns helfen,
die Welt besser zu **verstehen**?

»Jedem tiefen Naturforscher muß eine Art **religiösen Gefühls** naheliegen,
weil er sich nicht vorstellen vermag,
daß die **ungemein feinen Zusammenhänge**,
die er erschaut, von ihm zum **erstenmal** gedacht werden. [...]

Wer sie [Vorstellung, ich sei Atheist, Anm. d. Verf.] aus meinen wissenschaftlichen Theorien herausliest, hat sie kaum begriffen.«

- Albert Einstein